

МЫРЗАҚҰЛ АҚБОТА РАТБАЙҚЫЗЫ

Кейбір интегралданатын көпқабатты спиндік жүйелерді және олардың көпкомпонентті сызықты емес Шредингер теңдеулерімен байланысын зерттеу

«6D060100 - Математика» мамандығы бойынша философия докторы (PhD) дәрежесін алу үшін дайындалған диссертацияға АҢДАТПА

Зерттеу тақырыбының өзектілігі. Соңғы онжылдықтарда интегралданатын сызықты емес эволюциялық теңдеулер (ИСЕЭТ) теориясын зерттеуге қызығушылық артты. Бұл ИСЕЭТ-дің жаратылыстану ғылымдарының әртүрлі салаларында қосымшалары бар екеніне байланысты. Мысалы, дифференциалдық геометрияда олар қисықтар мен беттердің интегралдық класстарын шығара алады, ал физикада олар толқындық процестердің сызықтық емес динамикасын сипаттайды. ИСЕЭТ теориясын жасауға Абловиц М., Сигур Х., Лэм Дж., Додд Р., Ньюэлл А., Новиков С.П., Захаров В.Е., Шабат А.Б., Лакшманан М., Динг К. және тағы басқалардың жұмыстары арналды.

Бордаг Л., Яновский А., Мартина Л., Анко С. және т.б. еңбектері бірқабатты ИСЕЭТ-дің дифференциалдық геометриямен байланысы мәселелеріне арналған. Көпқабатты ИСЕЭТ-ді зерттеудің өзектілігі заманауи ғылымның осы бағыттағы дамуымен негізделген.

Жұмыстың мақсаты. Шредингер типтес көпкомпонентті сызықты емес эволюциялық теңдеулерді зерттеу және ИСЕЭТ теориясы негізінде оларға эквивалентті көпқабатты спиндік жүйелерді табу. Бір қабатты ИСЕЭТ арасындағы геометриялық және калибрлі эквивалентті орнатудың әдісін көпқабаттылар үшін жалпылау, сондай-ақ екі қабатты жағдайлар үшін олардың нақты шешімдерін табудың жалпыланған әдісін әзірлеу.

Зерттеу әдістемесі. Диссертациялық жұмыста зерттеу әдістемесінің негізіне солитондар теориясының белгілі әдістері ретінде бір қабатты ИСЕЭТ арасындағы геометриялық және калибрлі эквиваленттілікті орнату әдістері және олардың нақты шешімдерін табу үшін Дарбу түрлендіруі әдісі алынды. Диссертациялық жұмыста көпкомпонентті ИСЕЭТ зерттелетіндіктен, жоғарыда көрсетілген біркомпонентті ИСЕЭТ-ді зерттеу әдістері көпкомпонентті жағдайларға кеңейтілді.

Диссертацияның қорғауға шығарылып отырған негізгі жағдайы және зерттеу нәтижелері:

Диссертациялық жұмыс аясында алынған келесі зерттеу нәтижелері қорғауға ұсынылды:

- Ли алгебраларының қасиеттеріне негізделген интегралданатын сызықты емес теңдеулер арасындағы эквиваленттілікті орнатудың жаңа әдісі;
- екіқабатты интегралданатын теңдеулер арасындағы геометриялық және калибрлі эквиваленттілік;

– Г-спиндік жүйенің дәл шешімі және оның екіқабатты спиндік жүйенің шешімімен байланысы;

– екіқабатты интегралданатын теңдеулер арасындағы геометриялық эквиваленттілікті орнату әдісін n -қабатты жағдайлар үшін жалпылау.

Зерттеудің теориялық және практикалық маңыздылығы. Жұмыс теориялық сипатқа ие және көпқабатты интегралданатын сызықты емес дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер теориясын одан әрі дамытуға ықпал етеді.

Диссертацияның құрылымы және көлемі. Диссертация кіріспеден, төрт бөлімнен, қорытындыдан, пайдаланылған әдебиеттер тізімінен және қосымшалардан тұрады.

Зерттеу жұмысының негізгі мазмұны.

Бірінші бөлімде Ли алгебраларының $su(2)$ және $so(3)$ изоморфизм қасиеттеріне негізделген бірқабатты интегралданатын сызықты емес теңдеулер арасындағы эквиваленттілік орнату әдісі ұсынылған. Әдістің дұрыстығы сызықты емес Шредингер теңдеуі

$$iq_t + q_{xx} + 2\bar{q}q^2 = 0,$$

Және Гейзенберг ферромагнетигі теңдеуі

$$\vec{S}_t = \vec{S} \wedge \vec{S}_{xx},$$

сол сияқты Шредингер типті теңдеулер мен жалпыланған Гейзенберг ферромагнетигі теңдеуі арасында көрсетілген. Мұндағы $q(x, t)$ – комплекс мәнді функция, $\vec{S}(x, t)$ – спиндік вектор.

Екінші бөлімде екіқабатты спиндік жүйесі ұсынылған:

$$iA_t + \frac{1}{2}[A, A_{xx}] + iu_1A_x + v_1[\sigma_3, A] = 0,$$

$$iB_t + \frac{1}{2}[B, B_{xx}] + iu_2B_x + v_2[\sigma_3, B] = 0,$$

мұндағы $u_j, v_j (j = 1, 2)$ – байланыс потенциалдары, A және B – спиндік матрицалар, және оның келесі

$$iq_{1t} + q_{1xx} + 2(|q_1|^2 + |q_2|^2)q_1 = 0,$$

$$iq_{2t} + q_{2xx} + 2(|q_1|^2 + |q_2|^2)q_2 = 0$$

екікомпонентті Манаков жүйесімен геометриялық байланысы орнатылды.

Үшінші бөлімде көпқабатты спиндік

$$iA_t^{(1)} + \frac{1}{2}[A^{(1)}, A_{xx}^{(1)}] + iu_1A_x^{(1)} + v_1[\sigma_3, A^{(1)}] = 0,$$

$$iA_t^{(2)} + \frac{1}{2}[A^{(2)}, A_{xx}^{(2)}] + iu_2A_x^{(2)} + v_2[\sigma_3, A^{(2)}] = 0,$$

⋮

$$iA_t^{(N)} + \frac{1}{2}[A^{(N)}, A_{xx}^{(N)}] + iu_NA_x^{(N)} + v_N[\sigma_3, A^{(N)}] = 0$$

жүйесінің эквивалентті аналогы

$$\begin{aligned}
iq_{1t} + q_{1xx} + vq_1 &= 0, \\
iq_{2t} + q_{2xx} + vq_2 &= 0, \\
\vdots & \\
iq_{Nt} + q_{Nxx} + vq_N &= 0
\end{aligned}$$

векторлық сызықты емес Шредингер теңдеуі екендігі көрсетілді, мұндағы $v = 2(\sum_{j=1}^N |q_j|^2)$.

Төртінші бөлімде Г-спиндік жүйесінің, екі қабатты спиндік жүйенің және жалпыланған Гейзенберг ферромагнетигі теңдеуінің шешімдері табылған.

Диссертациялық жұмыстың ішкі бірлігі. Зерттеу нәтижелері «қарапайымнан күрделіге» принципі бойынша баяндалған. Алдымен математикалық физиканың әртүрлі салаларындағы кейбір бірқабатты (біркомпонентті) сызықты емес интегралдық теңдеулері зерттеледі. Мысалы: сызықты емес Шредингер теңдеуі, Гейзенберг ферромагнетик моделі, содан кейін екікомпонентті Манаков жүйесі және екіқабатты спиндік жүйелер қарастырылады. Әрі қарай зерттеу нәтижелері N-компонентті векторлық сызықты емес Шредингер теңдеуі үшін жалпыланады.

Жұмысты апробациялау. Зерттеу нәтижелері келесідей халықаралық ғылыми конференцияларда баяндалды:

- XX Халықаралық конференция «Geometry, Integrability, Quantization» (2-7 Маусым, 2018. Varna, Bulgaria);

- Студенттердің, магистранттардың және жас ғалымдардың XIV Халықаралық ғылыми конференциясы «ЛОМОНОСОВ – 2018» (Астана, 2018);

- «Қазақстандағы цифрлық индустрияның дамуы жағдайындағы математикалық және компьютерлік модельдеудің заманауи мәселелері» Республикалық ғылыми-практикалық конференциясы (Астана, 2018).

Жарияланымдар. Диссертациялық жұмыстың тақырыбы бойынша зерттеу нәтижелері 7 жұмыста жарияланды:

1. Surfaces and curves induced by nonlinear Schrodinger-type equations and their spin systems // Symmetry. – 2021. – Vol.13. – P.1827-1-1827-18 (WoS квартилі – Q2, Scopus процентилі – 90%).

2. Integrable motion of two interacting curves, spin systems and the Manakov system // International Journal of Geometric Methods in Modern Physics. – 2017. – Vol.14, №07. – P.1750115 (WoS квартилі – Q2, Scopus процентилі – 47%).

3. Integrable geometric flows of interacting curves/surfaces, multilayer spin systems and the vector nonlinear Schrödinger equation // International Journal of Geometric Methods in Modern Physics. – 2017. - Vol. 14, №10. – P.1750136(WoS квартилі – Q2, Scopus процентилі – 47%).

4. Integrability of the two-layer spin system // Geometry, Integrability and Quantization. – 2019. – Vol.20. –P.208–214. (Scopus процентилі – 24%).

5. Интегрируемость двух взаимодействующих кривых и геометрически-эквивалентный спиновый аналог уравнения Манакова // Вестник ЕНУ им. Л.Н.Гумилева. – 2016. – Вып. 113, №4. – С. 23-26.

6. Интегрируемость двухпараметрического уравнения М-ЛШ // XIV международная научная конференция студентов, магистрантов и молодых ученых «Ломоносов – 2018». Тезисы докладов XIV международной научной конференции. - Астана, 2018. - Часть 1. - С.32-33.

7. Об интегрируемости спиновой системы с самосогласованным потенциалом // Современные проблемы математического и компьютерного моделирования в условиях развития цифровой индустрии Казахстана Сборник материалов республиканской научно-практической конференции. - Астана, 2018. - С.101-106.

Ғылыми нәтижелерге сілтеме жасау. Осы диссертация аясында алынған негізгі ғылыми нәтижелерге алыс шетел ғалымдарының еңбектерінде сілтемелер жасалған:

1. Жоғарыда келтірілген жарияланған еңбектер тізіміндегі үшінші жұмысқа шетелдік авторлар үш рет сілтеме жасаған: Zhaowen Yan, Bian Gao, Minru Chen, Jifeng Cui «Chaos, Solitons and Fractals» журналында, doi.org/10.1016/j.chaos.2018.11.011; Nana Jiang, Meina Zhang, Jiafeng Guo, Zhaowen Yan «Chaos, Solitons and Fractals» журналында, doi.org/10.1016/j.chaos.2020.109644; Rong Han, Haichao Sun, Nana Jiang, Zhaowen Yan «Journal of Nonlinear Mathematical Physics» журналында, doi.org/10.1007/s44198-021-00001-0.

2. Жоғарыда келтірілген жарияланған жұмыстардың тізімінен бірінші мақаланың нәтижелеріне авторлар Rachel Klauss, Aaron Phillips and José M. Vega-Guzmán «Symmetry» журналында сілтеме жасаған, doi.org/10.3390/sym14030465.

Жұмыстың басқа зерттеу жұмыстарымен байланысы. Диссертациялық жұмыс Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігінің келесі гранттық қаржыландыру жобаларының ғылыми-зерттеу жұмыстарының жоспарларына сәйкес орындалды:

1) 2015-2017 жылдарға арналған «Елдің зияткерлік әлеуеті» басымдығы бойынша: «Келісімді дәйек көздері бар жалпыланған Ландау-Лифшиц теңдеуін және оның интегралданатын қысқартуларын зерттеу» тақырыбы бойынша;

2) 2020-2022 жылдарға арналған «Беттердің/көпбейнелердің геометриясы мен интегралданатын сызықты емес эволюциялық теңдеулердің байланысын зерттеу» тақырыбы бойынша жаратылыстану ғылымдары саласындағы ғылыми зерттеулер.